**Uvod u topologiju - 12.10.2016. Dodatni zadaci za samostalan rad uz vježbe br. 2**

[Z1] Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor takav da za svako $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{T}$ diskretna topologija. Dokazati.

[Z2] Šta su zatvoreni podskupovi u kofinitnoj topologiji?

[Z3] Navedite sve moguće topologije na sljedećim skupovima:

a) $X = \{a,b\}$;
b) $Y = \{a,b,c\}$.

[Z4] Neka je $X$ neprazan skup i $\mathcal{P}(X)$ njegov partitivni skup. Neka funkcija $k\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ zadovoljava sljedeće uslove:

a) $k(\emptyset) = \emptyset$,
b) $A \subset k(A)\ \forall A \in \mathcal{P}(X)$,
c) $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$ za sve $A,B \in \mathcal{P}(X)$.

Neka je $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : k(A) = A\}$.
Dokazati da je familija $\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$ topologija na $X$.
(Uputa: Prvo dokazati implikaciju $A \subset B \Rightarrow k(A) \subset k(B)$.)

[Z5] Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva i $\mathcal{T} = \{\emptyset,\mathbb{N}\} \cup \{\{1,\ldots,n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Dokazati da je $(\mathbb{N},\mathcal{T})$ topološki prostor.