

Uvod u topologiju - 26.10.2016. Dodatni zadaci za samostalan rad uz vježbe br. 4

[Z1] Dokazati da je skup A gust u topološkom prostoru (X, \mathcal{T}) ako i samo ako je $\text{Int}(X \setminus A) = \emptyset$.

[Z2] Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$. Dokazati da $a \in \bar{S}$ ako i samo ako za svaki prirodan broj n postoji neko $x_n \in S$ takvo da je $|x_n - a| < \frac{1}{n}$.

[Z3] Neka je X proizvoljan skup koji se sastoji od najmanje dvije tačke i neka je $x_0 \in X$. Definirajmo $\bar{A} = A \cup \{x_0\}$ za svaki neprazan $A \subset X$ i $\bar{\emptyset} = \emptyset$. Dokazati da je familija

$$\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \setminus A \mid A = \bar{A}\}$$

topologija na X .

[Z4] Neka je dat skup X i operator Int koji svakom skupu $A \subseteq X$ pridružuje skup $\text{Int } A \subseteq X$ tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- a) $\text{Int } X = X$
- b) $\text{Int } A \subseteq A$
- c) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$
- d) $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A$.

Tada je familija $\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \mid \text{Int } A = A\}$ topologija na X . Dokazati.

[Z5] Neka je X proizvoljan skup koji se sastoji od najmanje dvije tačke i neka je $X_0 \subset X$ takav da je $|X \setminus X_0| > 1$. Definirajmo $\text{Int } A = A \cap X_0$ za svaki pravi podskup A od X i neka je $\text{Int } X = X$. Dokazati da je familija $\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \mid \text{Int } A = A\}$ topologija na X .