Analiza I (TKN) – 26/27.10.2016. Dodatni zadaci za samostalan rad uz vježbe br. 7 i 8

[Z1] Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, gdje je $x_n = 2^{\sqrt{n}}$.

[Z2] Koristeći definiciju granične vrijednosti dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, gdje je $x_n = \frac{2}{\sqrt{3n-1}}$.

[Z3] Definicija: Niz (x_n) naziva se beskonačno velikim ako $|x_n| \to +\infty$ $(n\to\infty)$, a beskonačno malim ako $|x_n| \to 0$ $(n\to\infty)$.

Dokazati da niz $x_n = n^{(-1)^n}$ nije ograničen, a ipak nije beskonačno veliki kad $n\to\infty$.

[Z4]* Ispitati ograničenost niza $x_n = \frac{a^n}{n^k}$, $a > 1$, $k > 0$.

(Uputa: Napisati $a = 1 + \lambda$ za $\lambda > 0$, pa primjeniti Newtonovu binomnu formulu da biste a^n ograničili odozdo pogodnim brojem. Razlikovati slučajeve: $k = 1$, $k > 1$, $0 < k < 1$. U svakom slučaju niz je neograničen.)

[Z5] Dokazati:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{za } |q| < 1 \\ 1, & \text{za } q = 1 \end{cases}$, inače ovaj limes ne postoji

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

[Z6] Dokazati da je niz $x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$ beskonačno mali niz, po definiciji granične vrijednosti.

[Z7] Ispitati ograničenost, naći $\min$, $\max$, (ako postoje), $\inf$, $\sup$, $\liminf$, $\limsup$, niza

$$x_n = (-1)^{n+1} \frac{3}{n^2+2} \sin\frac{n\pi}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$$