

Analiza I (TKN) – 15/21.12.2016. Dodatni zadaci za samostalan rad uz vježbe br. 7 i 8 (20 i 21)

[Z1] Zakon kretanja tačke je $s = \sin t$, gdje je s rastojanje u centimetrima, a t vrijeme u sekundama. Naći srednju brzinu tačke u vremenskom razmaku od $t = 0$ do $t = \frac{\pi}{2}$.

[Z2] Za funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right), (x \neq 0), f(0) = 0$$

naći: a) $f'_-(0), f'_+(0)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$.

Da li postoji $f'(0)$?

[Z3] Naći izvode sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 2\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$

c) $f(x) = \ln x^2$

d) $f(x) = \operatorname{Ar th} x - \operatorname{arctg} x$

e) $f(x) = \ln [\ln (\ln x)]$

f) $f(x) = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}}$

g) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

h) $f(x) = x^{x^x}$

[Z4] Diferenciranjem identiteta $\cos (x + \alpha) = \cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha$, pokazati da je

$$\sin (x + \alpha) = \sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x.$$

[Z5] Dokazati da funkcija $y = -\ln (1 + x)$ zadovoljava diferencijalnu jednačbu $xy' + 1 = e^y$.

[Z6] Naći x'_y ako je $y = e^x + x$.

[Z7] Naći x'_y ako je $y = e^x + \ln x$.

[Z8] Naći y'_x za funkcije dane u parametarskom obliku:

a) $x = a \cos^2 \phi, y = b \sin^2 \phi$

b) $x = 3at/(1 + t^3), y = 3at^2/(1 + t^3)$.

[Z9] Naći y'_x sljedećih, implicitno zadanih, funkcija:

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$; naći $y'(4)$

c) $x \ln y - y \ln x = 1$; naći $y'(1)$

[Z10] Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

Kako treba odrediti konstante a i b da bi funkcija $f(x)$ bila diferencijabilna u tački $x = 1$?