Uvod u topologiju – 21.12.2016. Dodatni zadaci za samostalan rad uz vježbe br. 11 (12)

[Z1] Dokazati da je $\mathbb{R}$ s funkcijom d: $\mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ definiranom sa $d(x,y) = |x - y|$, $(\forall x,y \in \mathbb{R})$, metrički prostor.

[Z2] Za $p \geq 1$ označimo sa l^p skup svih nizova $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ takvih da red $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ konvergira.

Dokazati da za proizvoljna dva niza $x,y \in l^p$ red $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p$ konvergira i da je sa

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

određena metrika u l^p.

Uputa: Koristiti nejednakost Minkowskog koja glasi

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

za sve $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^p$ i $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^p$, $p \geq 1$.

[Z3] Neka je $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ prošireni skup prirodnih brojeva i neka je $\delta(m,n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$, $\left(\frac{1}{\infty} \overset{\text{def}}{=} 0 \right)$

Provjeriti da je $(\mathbb{N}^*, \delta)$ metrički prostor.

[Z4] (Topologija inducirana metrikom)

Familija $\mathcal{B} = \{B(x,r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}_+\}$ otvorenih lopti u metričkom prostoru (X,d) jest baza neke topologije na X. Dokazati.

[Z5] Preslikavanje $f((x,y)) = (x,y,0)$ je izometrija euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$ u euklidski prostor $\mathbb{R}^3$. Dokazati.

[Z6] Neka je (M,d) metrički prostor i M_0 neprazan podskup skupa M. Restrikcija $d_0 = d|_{M_0 \times M_0}$ je metrika na M_0. Par (M_0, d_0) naziva se potprostor metričkog prostora (M,d). Formalno, dva metrička prostora (M_1, d_1) i (M_2, d_2) su jednaki samo ako je $M_1 = M_2$ i $d_1 = d_2$. Tako, birajući različite podskupove datog metričkog prostora imat ćemo različite potprostore.

Insistiranje na ovoj „doslovnoj“ jednakosti je malog interesa, pa je bitnije sljedeće jednačenje u širem smislu.

Definicija 1. Za dva metrička prostora M_1 i M_2 kažemo da su metrički ekvivalentni ako postoji preslikavanje $f{:}M_1 \to M_2$ sa svojstvima

a) f je bijekcija,
b) f je izometrija.

Tada pišemo $M_1 \sim_{met} M_2$ i relacija $\sim_{met}$ je relacija ekvivalencije.

Definicija 2. Svojstvo metričkog prostora (M,d) je metrička invarijanta ako to svojstvo ima i svaki drugi prostor (M',d') koji je metrički ekvivalentan prostoru (M,d). Najprostija metrička invarijanta je dijametar prostora kojeg definiramo na sljedeći način:

Dijametar prostora (M,d) je broj (ili simbol $+\infty$)
$$\mathrm{diam}(M) = \sup\left\{d\left(x,x'\right) \,\middle|\, \left(x,x'\right) \in M \times M\right\}.$$

Dokazati da je dijametar prostora metrička invarijanta.

[Z7] Neka je A neprazni podskup metričkog prostora (M,d). Rastojanje tačke x od skupa A je broj

$$d_A(x) = \mathrm{dist}(x,A) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

Tada vrijedi:

a) $(\forall x \in M)\ x \in \overline{A} \Leftrightarrow \mathrm{dist}(x,A) = 0$,
b) $d_A{:}M \to [0,\infty)$ je neprekidna funkcija. Dokazati.

[Z8]* Za topološki prostor $(X,\mathcal{T})$ kažemo da je metrizabilan ako postoji metrika d na skupu X takva da je topologija inducirana njome jednaka topologiji $\mathcal{T}$, tj. da se te dvije topologije podudaraju. Dokazati da je metrizabilnost topološka invarijanta.